Introducción a las Curvas Elípticas
2. Funciones regulares, divisores, Riemann-Roch

Entrega: lunes 19 de mayo, 3 ejercicios a elección.

11. Sea C una curva proyectiva plana. Dado $P \in k(C)$ definimos $\nu_P : k(C) \to \mathbb{Z} \cup \infty$ (orden de cero o polo) de modo que $\nu_P(G/H) = I_P(G, C) - I_P(H, C)$. Observar que $\operatorname{div}(\phi) = \sum_P \nu_P(\phi)[P]$.
    (a) $\nu_P(\phi) = \infty$ si y sólo si $\phi = 0$.
    (b) $\nu_P(\phi\psi) = \nu_P(\phi) + \nu_P(\psi)$.
    (c) $\nu_P(\phi + \psi) \geq \min(\nu_P(\phi), \nu_P(\psi))$.
    (d) Si $\nu_P(\phi) < \nu_P(\psi)$ entonces $\nu_P(\phi + \psi) = \nu_P(\phi)$.

12. Sea C una curva proyectiva plana irreducible.
    (a) Si $a \in k$ entonces $a \in k(C)$ es regular en $C(k)$.
    (b) $\phi \neq 0$ es regular en P si y sólo si $\nu_P(\phi) \geq 0$.
    (c) $\phi \neq 0$ es regular en $C(k)$ si y sólo si $\operatorname{div}(\phi) \geq 0$.
    (d) Si ϕ es regular en P y $a \in k$ entonces $\phi - a$ es regular en P.
    (e) Si ϕ es regular en P, y $a = \phi(P)$ entonces $\nu_P(\phi - a) > 0$.
    (f) Si ϕ es regular en $C(k)$ entonces $\phi \in k$.
    (g) Si $\operatorname{div}(\phi) = \operatorname{div}(\psi)$ entonces $\phi = \lambda\psi$ con $\lambda \in k^\times$.

13. (a) $L(D)$ es un espacio vectorial.
    (b) Si $D \leq D'$ entonces $L(D) \subseteq L(D')$ y $\dim_k(L(D')/L(D)) \leq \operatorname{gr}(D' - D)$.
    (c) $L(0) = k$; $L(D) = \{0\}$ si $\operatorname{gr}(D) < 0$.
    (d) $L(D)$ tiene dimensión finita para todo D.
    (e) Si $\operatorname{gr}(D) \geq 0$ entonces $\ell(D) \leq \operatorname{gr}(D) + 1$.
    (f) Si $D \equiv D'$ entonces $\ell(D) = \ell(D')$.

14. Sea $\mathbb{P}^1 : Y = 0$, curva proyectiva en $\mathbb{P}^2$ con coordenadas $(X : Y : Z)$.
    (a) Probar que $k(\mathbb{P}^1) = k(t)$ donde $t = X/Z$.
    (b) Calcular $\operatorname{div}(t)$
    (c) Calcular $\operatorname{div}(f/g)$ donde $f, g \in k[t]$ son coprimos.
    (d) Concluir que $\operatorname{gr}(\operatorname{div}(f/g)) = 0$.
    (e) Sea $P = (0 : 0 : 1)$. Calcular $L(nP)$ y probar que $\ell(nP) = n + 1$ si $n > 0$.
    (f) ¿Qué puede decir sobre el género de $\mathbb{P}^1$?

15. Sea $C : Y^2 Z = X(X - Z)(X - \lambda Z)$ con $\lambda \neq 0, 1$. Sean $x = X/Z$, $y = Y/Z$.
    (a) Calcular $\operatorname{div}(x)$.
    (b) Calcular $\operatorname{div}(y)$.
    (c) Sea $P = (0 : 1 : 0)$. Mostrar que $L(nP) \subseteq k[x, y]$. Probar que $\ell(nP) = n$ si $n \leq 1$.
    (d) ¿Qué puede decir sobre el género de C?