Introducción a la Teoría de Números
5. Fracciones continuas

1. Mostrar que cualquier número racional no nulo puede representarse como fracción continua finita en exactamente dos maneras distintas.
2. Evaluar la fracción continua infinita $[2, \overline{1, 2, 1}]$.
3. Determinar la fracción continua infinita de $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.
4. Sea $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ una fracción continua ($a_i > 0$ para $i \neq 0$). Si $b > 0$, entonces
$$[a_0, a_1, \ldots, a_n + b] < [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$
si y sólo si n es impar.
5. Sea d un entero coprimo con 10. Probar que la expansión decimal de $1/d$ tiene período igual al orden de 10 módulo d. Sugerencia: $\frac{1}{10^r-1} = \sum_{n\geq 1} 10^{-rn}$.
6. Sea $c_m = \frac{p_m}{q_m}$ el m-ésimo convergente parcial de $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ con $a_0 > 0$. Mostrar que
$$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$
y
$$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$$
Sugerencia: notar que $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$.
7. ∗∗ Probar que si $\alpha > 1$ es un irracional cuadrático tal que su conjugado $\alpha' \in (-1, 0)$ entonces la fracción continua de α es puramente periódica.
8. Sea N un natural, no cuadrado perfecto.
   (a) Probar que $\sqrt{N} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_n, 2a_0}]$. Sugerencia: $\sqrt{N}+a_0$ está en las condiciones del problema anterior. [Se puede probar más aún: que $a_1 = a_n$, $a_2 = a_{n-1}$, etc. es decir que hay una simetría extra en el desarrollo en fracción continua.]
   (b) Probar que
$$\sqrt{N} = \frac{(\sqrt{N} + a_0)p_n + p_{n-1}}{(\sqrt{N} + a_0)q_n + q_{n-1}}$$
   donde p_n/q_n es el n-ésimo convergente parcial de $\sqrt{N}$. Sugerencia: $\sqrt{N}+a_0 = r_{n+1}$ en la notación usada en clase.
   (c) Despejar p_{n-1} y q_{n-1} en términos de p_n y q_n, usando que 1 y $\sqrt{N}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ (porque $\sqrt{N}$ es irracional).
   (d) Concluir que
$$p_n^2 - Nq_n^2 = (-1)^{n+1}$$
9. Encontrar una solución a la ecuación
$$X^2 - 14Y^2 = 1$$
con $X, Y \in \mathbb{Z}$, $Y \neq 0$.